EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

33e JAARGANG
IX - 1 JUNI 1958

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE SIGNATUURFUNCTIE IN DE ANALYSE

door

Dr. B. VAN ROOTSELAAR.

In de meeste leerboeken der analyse, waarin de bepaling van de primitieve functies van rationale uitdrukkingen in x en $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ door middel van substituties behandeld wordt, geschiedt dit nogal slordig.

In het recente leerboek van B. Meulenbeld en W. K. Baart (Analyse voor propaedeutische examens I) worden de algebraïsche substituties aantrekkelijk (d.w.z. meetkundig) en zorgvuldig ingevoerd. Men weet echter, dat zij vaak zeer veel werk met zich brengen en dat de goniometrische substituties meestal sneller tot het doel — de primitieve functies — voeren. Ook deze substituties worden accuraat besproken, doch ten aanzien van hun gebruik bij het bepalen van primitieve functies laten de schrijvers een somber geluid horen, waarschijnlijk omdat zij zich hebbben laten afschrikken door het optreden van modulusstrepen in de integrand. Zij schrijven (p. 151): „Een onaangenaamheid is hierbij het optreden van het modulusteken, waardoor men twee gevallen moet onderscheiden. Bij bepaalde integralen heeft men deze moeilijkheid niet, omdat men vooraf weet op welk interval x gegeven is, waardoor de modulusfunctie door een geschikte keuze van φ eenduidig kan worden vastgelegd."

Door deze passage wekken de schrijvers de indruk, dat zij de goniometrische substituties in de boven aangegeven situaties — nl. ter bepaling van de primitieve — verwerpen. Inderdaad kan men, door twee gevallen te onderscheiden, de primitieve niet altijd op natuurlijke wijze in een enkele formule vatten. Nu past men meestal de goniometrische substituties toch toe zonder de genoemde onderscheiding der twee gevallen, met de rechtvaardiging, dat zij een voorbereiding geven voor de behandeling van de bepaalde integralen. Echter, de onderscheiding is bij twee van de drie aangegeven substituties niet nodig, zoals bij even nadenken blijkt. In het derde geval kan men zich bij de bepaling van de primitieve bedienen van de signatuurfunctie, zodat aan de goniometrische substituties geen enkele ongerechtigheid behoeft te kleven.

Zoals bekend, is de signatuurfunctie σ_f van f gedefinieerd door

$$\sigma_f(x) = \begin{cases} 1 \text{ voor } x \text{ met } f(x) \geqq 0 \\ -1 \text{ voor } x \text{ met } f(x) < 0. \end{cases}$$

Hierdoor kan men de modulusfunctie schrijven als product van de functie en zijn signatuurfunctie:

$$|f| = \sigma_f . f$$

Met σ_f kan men eenvoudig rekenen. Men heeft de eigenschappen $\sigma_f . \sigma_g = \sigma_{fg}$, $\sigma_{f^2} = \sigma_1 = 1$, $\sigma_{fg} = \sigma_{f/g}$, enz. en nog $d(\sigma_f . g)/dx = \sigma_f . dg/dx$.
Op de laatste eigenschap berust het voordeel, dat men heeft bij de bepaling van de primitieve functie. We komen op deze eigenschappen nog terug.

De wortelvormen $\sqrt{x^2 + 1}$, $\sqrt{x^2 - 1}$, $\sqrt{1 - x^2}$, welke respectievelijk verwijderd worden met de substituties $\varphi =$ arctgx; $\varphi =$ arccos $(1/x)$ en $\varphi =$ arcsinx, gaan dan over in $\sigma_{\cos\varphi}$. sec φ, $\sigma_{\text{tg}\varphi}$. tg φ en $\sigma_{\cos\varphi}$. cos φ. Ten aanzien van deze resultaten kan men nu het volgende opmerken. Bij de eerste en de derde substitutie ligt, op grond van de definities van arctgx en arcsinx, φ in het interval $(-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi)$ en dus is cos φ positief, dat wil zeggen $\sigma_{\cos\varphi} = 1$. De resultaten van deze substituties zijn dus opvolgend: sec φ en cos φ (voor de wortelvormen $\sqrt{x^2 + 1}$ en $\sqrt{1 - x^2}$). Bij deze substituties behoeven we dus niet twee gevallen te onderscheiden.

Bij de tweede substitutie ligt φ in het interval $(0, \pi)$ en in dit interval is tg φ niet definiet en dus valt $\sigma_{\text{tg}\varphi}$ niet weg. Hiervoor is de opmerking van de geciteerde schrijvers dus juist. Door nu te werken met de signatuurfunctie vatten we die twee gevallen samen. Deze registratie van het teken levert dus een vereenvoudiging bij de bepaling van de primitieve. Bij de bepaalde integralen wordt deze vereenvoudiging echter weer grotendeels te niet gedaan — zoals we zullen zien — door de gecompliceerde samenhang van de signatuurfunctie daarmee.

Men kan de signatuurfunctie een beetje geleerder invoeren, nl. door middel van een functionaal.

Zij F de klasse der functies van een reële veranderlijke. Aan elke $f \varepsilon$ F voegen we toe een afbeelding (functionaal) $\sigma_f : F \to F$. De beeldfunctie van $g \varepsilon$ F onder de afbeelding σ_f geven we aan met $\sigma_f g$. De afbeelding is gedefinieerd door:

$$(\sigma_f g)(x) = \begin{cases} g(x) \text{ voor } x \text{ met } f(x) \geqq 0 \\ -g(x) \text{ voor } x \text{ met } f(x) < 0. \end{cases}$$

Dit functionaal heeft de eigenschappen: $\sigma_1 g = g$; $\sigma_f(g + h) = \sigma_f g + \sigma_f h$; $\sigma_f(gh) = (\sigma_f g)h = g(\sigma_f h)$ en dus voor een product $\sigma_f(g_1 \ldots g_n) = (\sigma_f g_1) \cdot g_2 \ldots g_n = \ldots = g_1 \ldots g_{n-1}(\sigma_f g_n)$; $\sigma_f h = \sigma_g h$ gelijkwaardig met $fg \geqq 0$; $\sigma_f h = -\sigma_g h$ gelijkwaardig met $fg < 0$ en

verder de overige reeds voor de signatuurfunctie genoemde. In het bizonder is $\sigma_f f = |f| = \sqrt{f^2}$.

Het verband met de bepaalde integraal kan men als volgt uitdrukken.

Laat U_i^o de gesloten intervallen zijn, waarop $\sigma_f = 1$ en V_k^o de open of rechtsopen intervallen, waarop $\sigma_f = -1$. Stelt men dan $U_i = I \cap U_i^o$ en $V_k = I \cap V_k^o$, dan is

$$\int_I \sigma_f g dx = \sum_i \int_{U_i} g dx - \sum_k \int_{V_k} g dx$$

Is G de primitieve van g, dan geldt dus niet algemeen $\int_I \sigma_f g dx = \sigma_f G \,|_I$, hoewel $\sigma_f G$ de primitieve van $\sigma_f g$ is. Ook geldt niet algemeen

$$\int_I \sigma_f g dx = \sum_i (\sigma_f G \mid U_i) + \sum_k (\sigma_f G \mid V_k).$$

(σ_f is een discontinue functie.)

In de meeste gevallen uit de praktijk bevat het integratieinterval geen discontinuiteiten van σ_f. Bv. is dit zo bij de boven vermelde substitutie $\varphi = \arccos(1/x)$. Om dit te illustreren, kunnen we het voorbeeld uit het genoemde boek van Meulenbeld en Baart beschouwen. Zij behandelen op p. 148 en p. 151 de volgende integraal

$$I = \int_1^{5/4} \sqrt{x^2 - 1}/x \,.\, dx$$

De primitieve van de integrand is (met genoemde substitutie):

$$F = \sigma_{tg\varphi}(tg\,\varphi - \varphi) + c$$

en dus in x uitgedrukt:

$$F = \sqrt{x^2 - 1} - \sigma_{tg(\arccos(1/x))} \,.\, \arccos\,(1/x) + c$$

De bepaalde integraal I kan men hieruit verkrijgen door $I = F(5/4) - F(1)$, d.w.z. door de grenzen in te vullen. Merk op, dat dit niet zou gaan indien de integraal van $-\frac{5}{4}$ tot -1 gevraagd werd!

Omdat $\sqrt{x^2 - 1}$ slechts betekenis heeft voor $x \geqq 1$ en $x \leqq -1$ is een bepaalde integraal altijd een integraal over een deelinterval, hetzij van $x \geqq 1$, hetzij van $x \leqq -1$. In beide gevallen is de signatuurfunctie constant.

Valt een discontinuiteit van σ_f samen met een nulpunt van de primitieve, dan kan men haar bij de integratie negeren, zoals men onmiddellijk verifieert.

Een instructief voorbeeld is in dit verband $\int_0^2 |x - 1| dx$. Twee primitieven zijn $\sigma_{x-1} \,.\, \frac{1}{2}(x - 1)^2$ en $\sigma_{x-1} \,.\, \frac{1}{2}x^2 - \sigma_{x-1} \,.\, x$. Bij de eerste kan men zonder meer de grenzen 0 en 2 invullen, bij de tweede moet men volgens de formule splitsen.

Het is, dunkt me, wel duidelijk, dat het gebruik van de signatuurfunctie bij de bepaalde integralen in het onderwijs geen zin heeft. Een niet zwaarwichtig, maar precies gebruik bij de bepaling van primitieve functies lijkt me noodzakelijk, daar anders conflicten ontstaan met andere eisen van exactheid die gesteld worden.

NOG EENS DE TERM NULWAARDE

door

Dr. P. BRONKHORST

De heer Vredenduin en ik hebben naar aanleiding van zijn artikel „De term nulwaarde" in Euclides, 33e jaargang, blz 93, vrij uitvoerig gecorrespondeerd. Ik wil nu graag toegeven, dat uit een oogpunt van taal, het woord nulwaarde niet direct een *onjuist* woord is, maar ik blijf toch van mening, dat het een *ongewenst* woord is. Immers als „nulwaarde" een waarde is om iets nul te maken, waarom is dan „maximumwaarde" niet een waarde om iets maximaal te maken!? Juist deze twee *totaal verschillende betekenissen* van *volkomen op dezelfde wijze* gevormde woorden is ongewenst.

Een wortel van de vergelijking $f(x) = 0$ is een getal dat $f(x)$ nul maakt, maar dat is juist de definitie van een wortel van $f(x)$! Het zijn dus twee volkomen dezelfde dingen, terwijl men door het woord nulwaarde te gebruiken, als het ware suggereert, dat er iets anders aan de hand is.

Met de naam „wortel" wordt alles zo prettig symmetrisch: eerst bepaalt men de wortels van eenvoudige vierkantsvergelijkingen $f(x) = 0$, door $f(x)$ te ontbinden; daarna ontbindt men $f(x)$ door de wortels van $f(x)$ te bepalen.

Ook de factorstelling krijgt een prettige vorm: $f(x)$ is deelbaar door $x - a$, als a een wortel is van $f(x)$.

Naschrift. Gaarne voeg ik hieraan toe, dat ik mij geheel kan verenigen met deze praktische zienswijze van Dr. Bronkhorst.

P. G. J. Vredenduin

EEN MEETKUNDIGE PLAATS IN DE MECHANICA

door

Drs. R. Kooistra

Een stoffelijk punt met gewicht G ligt op een ruw horizontaal vlak V. De wrijvingscoëfficient voor het s.p. en het vlak V is gegeven: $f = \text{tg}\, \varphi$. De grootte van de kracht K, die onder een hoek α met vlak V werkt en het s.p. op het punt brengt te gaan bewegen, is eenvoudig uit de gegevens φ en G te construeren. Laten we nu α over een zeker gebied variëren, dan kunnen we vragen naar de meetkundige plaats van de eindpunten van de krachten K. Uit KS $=$G blijkt eenvoudig, dat de m.p. een *rechte lijn* is, die evenwijdig loopt met de van α onafhankelijke drager van de totale reactie T.

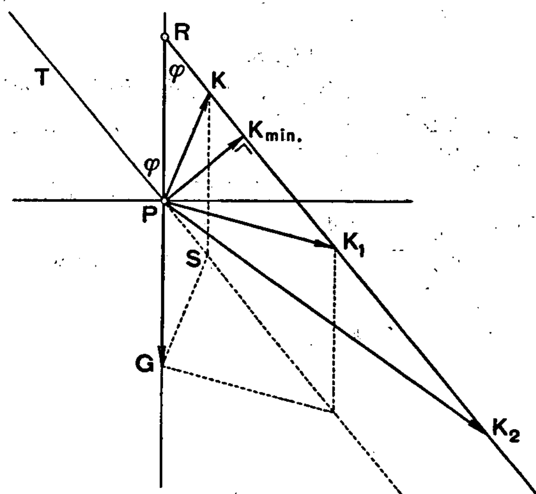


Fig. 1.

In een vraagstuk, waarin nu niet direct een constructie van K wordt verlangd, kan de leerling toch snel een behoorlijke tekening verkrijgen door een rechte // T te trekken door het punt R op de Y-as (PR $=$ G), waarna K bij gegeven α kan volgen.

De grootte van K is bij gegeven α:

$$K = \frac{G \sin \varphi}{\cos (\alpha - \varphi)}.$$

Het is voor de leerling een nuttige oefening — zelf heb ik het

voorafgaande en wat hierna volgt in een prijsvraag voor de IVe klas verwerkt — de grafiek van K als functie van α te tekenen (voor de grafiek b.v. $\varphi = 30°$ nemen), waarbij de leerling dan tevens het verband tussen de grafiek en de m.p. kan aangeven.

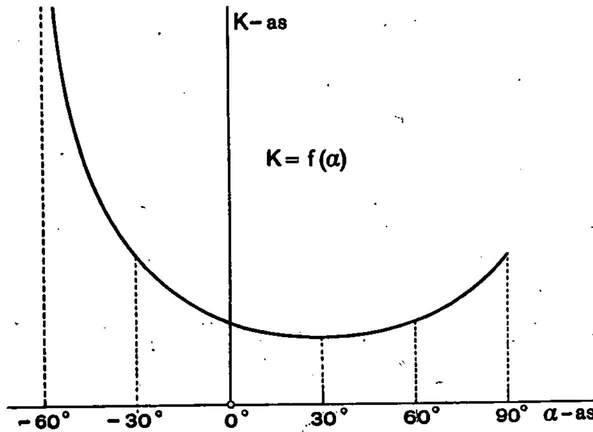


Fig. 2.

Uit de figuur van de m.p. blijkt, dat α ligt in het gebied $90° > \alpha > -(90° - \varphi)$, wat in de grafiek dus $-60° < \alpha < 90°$ wordt. Het toelaatbare gebied voor K is dus $\angle$ RPS, met als grenzen voor K: $K = G$ en $K = \infty$. In het gebied binnen $\angle$ GPS bestaat geen kracht K, die het s.p. op het punt kan brengen te gaan bewegen. Immers, T valt dan, bij een zekere K, binnen de vaste hoek φ en dus is $W < W_{max}$.

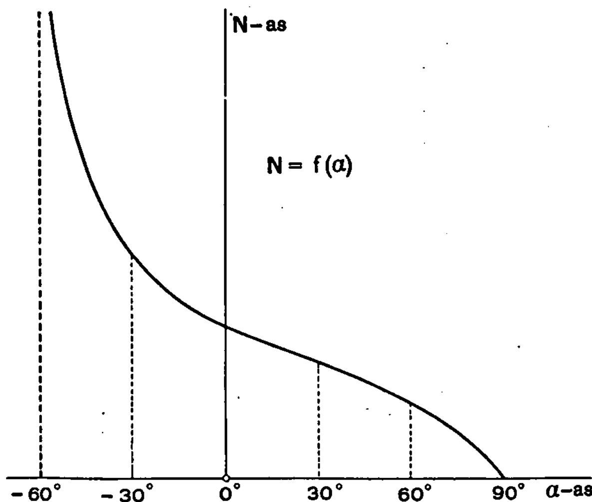


Fig. 3.

Hoe N van α afhangt is ook weer het best te zien uit de grafiek voor N als functie van α:

$$N = \frac{G \cos \alpha \cos \varphi}{\cos (\alpha - \varphi)},$$

waaruit de grafiek voor W_{max} gemakkelijk kan worden verkregen.

Figuur 1 is ook bij uitstek geschikt om de leerlingen aanschouwelijk voor te stellen, welke de *kleinste* kracht K is, die het s.p. op het punt brengt te gaan bewegen. Ze *zien* direct onder al de krachten K de kleinste kracht als de loodlijn uit P op de meetkundige plaats. Uit de figuur volgt dan onmiddellijk de richting $\alpha = \varphi$ en de grootte: $K_{min} = G \sin \varphi$.

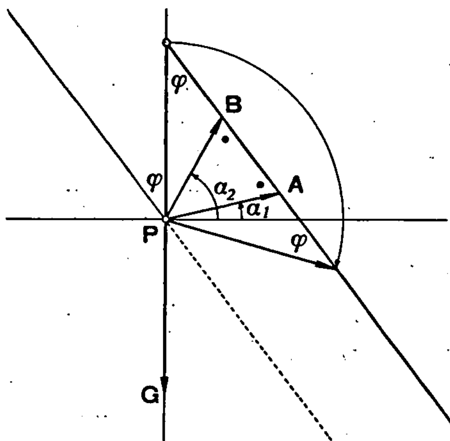


Fig. 4.

Zowel uit de grafiek voor K als uit de figuur van de m.p. blijkt, dat voor twee verschillende hoeken α_1 en α_2 krachten K kunnen optreden, die *dezelfde* grootte hebben. Men kan de hoeken α_1 en α_2 kiezen in het gebied $90° > \alpha > -(90° - 2\varphi)$. Voor zulk een paar hoeken geldt de betrekking:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\varphi.$$

Immers (zie fig. 4),

$$\angle A = \angle B \rightarrow \alpha_1 + 90° - \varphi = \varphi + 90° - \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2\varphi,$$

wat overigens ook uit de formule voor K goniometrisch kan worden afgeleid.

VOORGRIEKSE EN GRIEKSE MEETKUNDE.[1])

door

PROF. DR. E. M. BRUINS

Sedert men in de geschiedenis der Wiskunde de „romantische periode" achter zich heeft en men zich dus niet meer kan beperken tot een summier beschrijven van de inhoud van de oude geschriften maar zich integendeel rekenschap wenst te geven van de gedachtengang der oude wiskundigen is het noodzakelijk, dat men naast een mathematische kennis ook een grondige philologische vaardigheid bezit. Zo niet, dan loopt men het gevaar, hetzij door moderne denkwijzen aan de Ouden methoden toe te schrijven, die bij nauwkeurige beschouwing der teksten niet door hen werden gevolgd, hetzij als philoloog voor onoverkomelijke vertalingsmoeilijkheden te komen. En juist doordat het philologisch inzicht naast het wiskundige zich verdiept blijkt het steeds weer nodig de „oude opvattingen" te herzien en blijkt het steeds weer hoe onbetrouwbaar de „standaardedities" voor de wiskunde zijn. Wij willen dit toelichten aan de Egyptische meetkunde.

Egyptische Meetkunde.

Naast enkele kleine fragmenten bestaan de bronnen hierover uit de Papyrus Rhind en de Papyrus van Moskou. Hieruit is duidelijk geworden, dat de Egyptenaren een zeer nauwkeurige terminologie gebruiken: „lengte" en „breedte" voor de zijden van een rechthoek en een rechthoekige driehoek, „mondopening" en „hoogte" voor een gelijkbenige driehoek. De oppervlakte van rechthoekige driehoeken, rechthoeken en gelijkbenige driehoeken worden volgens de juiste formules der Euclidische meetkunde berekend. Wanneer men de toevoeging „om er een rechthoek van te maken" leest als de schrijvers hetzij de oppervlakte van een driehoek verdubbelen alvorens de zijden te berekenen, hetzij de basis halveren alvorens met de „hoogte" te vermenigvuldigen, dan wijst dit op een zekere mathematische analyse der figuren. Het begrip „verhouding", niet dat der evenredigheid, komt voor. Een rechthoeksoppervlakte of eén als een rechthoek te berekenen oppervlakte wordt door een andere term (*śttjw*) aangegeven dan een willekeurige oppervlakte (*3ḥt* = akker). De berekening van blokken en cylinders wordt uitgevoerd. De benadering van $\pi/4$, bij deze berekeningen gebruikt, is 64/81, in moderne schrijfwijze. De inhoudsberekening van een

*) Voordracht, gehouden op 26 augustus 1957 tijdens de Vakantiecursus van het Mathematisch Centrum.

van een eierschaal". Dit zou reeds zeer vreemd zijn voor een halve cylinder! In griekse teksten vindt men óók ᾠοῦ ἥμισυ, de helft van een ei, voor iets als een halve bol. Er is geen reden aan te geven, waarom de lengte van de cylinder, zoals Peet onderstelt, hier door een afwijkende term, waarvan de betekenis „gaaf", „zonder beschadiging", „gezond" wél bekend is, zou worden aangegeven. Zonder tekstcorrectie op grammaticaal volkomen duidelijke wijze is dan de beschrijving van een cirkelvormige „monding": „van de mondopening $4\frac{1}{2}$ bij $4\frac{1}{2}$, zonder uitzondering", dat wil zeggen „rondom rond hoe ook gemeten". Er wordt gevraagd naar een *3ḥt*, een akker. De berekening verloopt volgens

$$F = \frac{\pi}{4} \times 2d \times d; \; d = \text{diameter}.$$

De critiek van Peet is dan ook meer een poging om te ontgaan, dat aan de Egyptische wiskunde de ontdekking van de exacte formule voor de oppervlakte van de bol systematisch zou moeten worden toegeschreven en, waar het een rond oppervlak betreft, zoekt Peet een uitweg naar een cylinder, die wél binnen het bereik moet worden geacht. Inderdaad, infinitesimale methoden veronderstellen is hier niet toelaatbaar, maar een „bewijsvoering" onderstellen is onnodig! Het „onbegrijpelijke" wordt waarschijnlijk wel veroorzaakt door het feit, dat ruwe schattingen met eenvoudige breuken en veelvouden precies met het mathematisch exacte overeenkomen kunnen.

Het is bekend hoe vergelijking van de cirkeloppervlakte met die der omgeschreven en ingeschreven vierkanten als rekenkundig gemiddelde de benadering $\pi = 3$ levert. Het bestaan van een figuurtje in de Papyrus Rhind van een in negen vierkantjes verdeeld vierkant, met een ingeschreven cirkel ontstaan door de vierkanten bij de hoekpunten half weg te snijden, levert door "quadratuur van de cirkel":

$$9F = 7d^2, \; (9x)^2 = 63d^2, \text{ ongeveer } 64d^2 = (8d)^2$$
$$x = d - \tfrac{1}{9}d,$$

waarin x de zijde van een vierkant voorstelt, dat in oppervlakte gelijk is aan de cirkel, met diameter d.

De bekendheid met de formule van de afgeknotte pyramide levert het resultaat, dat analoog de kegel omstreeks het derde deel van het product van „grondvlak en hoogte" zal moeten zijn. Dan echter levert de vergelijking van halve bol, kegel en cylinder met hetzelfde grondvlak en dezelfde „hoogte" als rekenkundig gemiddelde precies de juiste formule voor de bol:

afgeknotte pyramide met quadratisch grondvlak en de berekening van de oppervlakte van een halve bol vormen het hoogtepunt van de prestaties der Egyptenaren. Deze laatste interpretaties zijn door zuiver wiskundige constructies en door, ongemotiveerde, veranderingen aan te brengen in de overgeleverde tekst bestreden door Weselowskij en Peet. Geheel ten onrechte! Wij zullen in deze gevallen aanwijzen om welke „kleinigheden" het gaat en op welke geringe aanduidingen men dient te letten.

Weselowskij geeft aan, dat in de figuur voor een afgeknotte pyramide met bovenvlaksribbe 2 en grondvlaksribbe 4 het getal **6** staat, dat dan met de oppervlakte zou moeten corresponderen! Hij verdeelt nu een kubus door middenloodvlakken op de ribben en verkrijgt zonder meer (Fig. 1.):

$$3 \times \text{Volume} = 4^2 \times 2 + 2 \times 4 \times 2 + 2^2 \times 2 = 28 \times 2 = 56.$$

Hij ziet dus slechts een speciaal geval van $a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$! Hoe geniaal ook gevonden, de opvatting loopt op de tekst zelf vast. Deze berekent $4^2 = 16$; $2 \times 4 = 8$; $2^2 = 4$; $16 + 8 + 4 = 28$; $6 : 3 = 2$; $28 \times 2 = 56$.

Er wordt uitdrukkelijk slechts één pyramide berekend, en de „hoogte" 6 wordt in drieën verdeeld!! Paleographisch loopt de verklaring óók vast, omdat in plaats van de dan noodzakelijke term *nt śttjw* er hier staat *n śttjw*, waarmede vaststaat, dat de **6** in de figuur niet de oppervlakte voorstelt, maar aangeeft, wat „bij de oppervlakte van de doorsnede behoort".

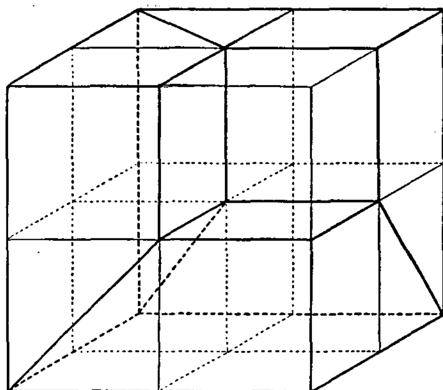


Fig. 1.

Evenzo is de opvatting van Peet, dat de halve bol niet werd berekend, doch de oppervlakte van een halve cylinder, paleographisch onhoudbaar. De te berekenen oppervlakte wordt aangeduid als die van een „korf" en later nog gespecificeerd als „de helft

Hiermede ligt een uitgangspunt

$$n\,a_n = [\pi d] = 6R$$

voor de hand. Wellicht door beschouwing van een regelmatige twaalfhoek heeft men een betere benadering van π als $3\frac{1}{8}$ verkregen. De stelling van Pythagoras en enkele relaties in de rechthoekige driehoek worden toegepast. Uit verschillende teksten volgt de identiteit

$$\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{2}\right)^2 = 1,$$

die het de Babyloniërs mogelijk maakte Pythagoreische triaden, waarvan tenminste één getal regulair $[2^\alpha 3^\beta 5^\gamma]$ is, op te stellen. Door oppervlaktevergelijking werden zeer eenvoudig problemen opgelost, die bij toepassing van „evenredigheden" in de driehoek tot vrij gecompliceerde berekeningen aanleiding geven.

De Babylonische meetkundige heeft het begrip „hoek" en „parallel" en evenmin het begrip der evenredigheid niet tot zijn beschikking gehad, zoals blijkt uit het feit, dat hiervoor geen „woorden" bestaan! Het enige wat hij bij voortduring doet is het neerlaten van loodlijnen, waardoor, door toepassing van de stelling van Pythagoras, het meetkundig probleem tot een rekenkundig wordt teruggebracht. De meetkunde kan dus het best worden gekarakteriseerd als de „Meetkunde van het Schietlood". Heeft men eenmaal de existentie van een rechthoek, — de hypothese van de rechte hoek zou men modern gesproken kunnen zeggen —, aanvaard, dan loopt door oppervlaktevergelijking de opbouw der meetkunde zeer eenvoudig verder, wellicht eenvoudiger dan in de Euclidische meetkunde met het — overbodige — hoekbegrip gebeurt. Laat ons daarvan iets aanduiden:

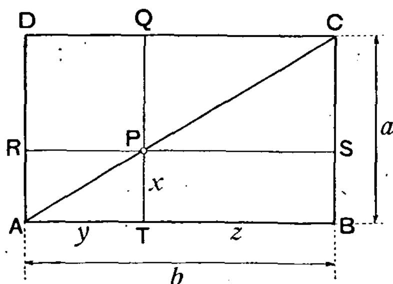


Fig. 2.

Een rechthoek verdeelt men door een diagonaal in twee gelijke delen; uit een punt van de diagonaal laat men de loodlijnen op de

cylinder: πr^3; kegel $\frac{1}{3}\pi r^3$; bol: $\frac{2}{3}\pi r^3$.

Evenzo is de oppervlakte van de halve bol zeker kleiner dan die van de cylinder met bovenvlak ($3\pi r^2$) en zeker groter dan de grondcirkel (πr^2). Het rekenkundig gemiddelde is weer precies goed ($2\pi r^2$). Het ongeloofwaardige en „verbluffende" ontstaat alleen als men exacte en zuiver meetkundige afleidingen onderstelt! Daartoe is geen reden en daarvoor is geen aanwijzing. Ruwe benaderingen werden in de practische meetkunde, het berekenen van oppervlakten van landerijen, wel degelijk gebruikt. De becijferingen van de tempel van Edfoe leveren het bewijs, dat in oud Egypte de agri mensoren formule in gebruik was, de formule, die het gemiddelde van de paren overstaande zijden van een vierhoek vermenigvuldigt om de oppervlakte te verkrijgen. Voor een driehoek constateert de Egyptenaar hier: „de vierde zijde is er niet" en hij berekent het product van de helft van één zijde met de halve som der beide anderen! Deze practische problemen ,waar het in het geheel niet om exacte resultaten ging, hebben natuurlijk het eerst de aandacht getrokken en ... beschouwd als het toppunt van meetkundige ontwikkeling, aanvankelijk een te lage waardering van het Egyptische kunnen ingang doen vinden.

Babylonische Meetkunde.

De oud Babylonische meetkunde is een „rekenende meetkunde". In de oudste tijden werd ook de agri mensoren formule toegepast voor de berekening van vierhoeken. De transversaal, die, met deze onjuiste formule consequent berekend, de oppervlakte in twee delen met een bepaalde verhouding verdeelt is in lengte — opnieuw een soort wiskundig wonder — precies dezelfde als die voor een trapezium in de Euclidische meetkunde, die aan de evenwijdige zijden parallel loopt. Ten onrechte heeft men zodoende aanvankelijk overal „trapezia en evenwijdige lijnen" gezien. De lengten van de lijnen en lijnstukken klopten altijd prachtig; alleen met de oppervlakten was het vaak mis; die werden te groot!

Uit de teksten van Susa blijkt, dat naast het begrip diameter ook het begrip „straal" van een cirkel voorkomt in oud-Babylonische tijd, dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een gelijkbenige driehoek op de hoogtelijn uit de top ligt en dat de hoogtelijn de basis middendoordeelt. In deze vroege periode komt ook een behandeling van de regelmatige vijf-, zes-, en zevenhoek voor, zowel in figuren als tabellen. Hieruit volgt, dat gekozen werd:

$$a_5 = 30, \quad R = 25; \quad a_6 = 30, \quad R = 30; \quad a_7 = 30, \quad R = 35.$$

Een der vele betrekkingen volgt uit

$$BCTP = \tfrac{1}{2}(x + a)z = RPCD = \tfrac{1}{2}(z + 2y)(a - x)$$

Dergelijke betrekkingen uit de rechthoek werden dan onmiddellijk voor de driehoek toegepast.

Het rekenvoorbeeld MLC 1950 toont dit ten duidelijkste: (Fig. 4). Een rechthoekige driehoek wordt door een loodlijn op een rechthoekszijde verdeeld. Het onderste trapezium heeft een oppervlakte A, de stukken van de rechthoekszijde zijn k en m. Gevraagd worden de basis en de transversaal.

De tekst rekent zonder meer: $A : k = \alpha$; A : $(2m + k) = \beta$; basis $= \alpha + \beta$; transversaal $= \alpha - \beta$.

Hoe men door oppervlaktebeschouwing meer ingewikkelde vraagstukken direct tot oplossing bracht worde hier nog aangetoond met het probleem VAT 8512. Een rechthoekige driehoek wordt door een loodlijn op een der zijden in twee stukken verdeeld

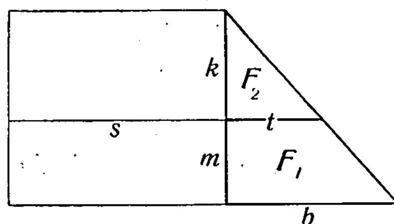


Fig. 5.

met de oppervlakten F_1 en F_2. Gegeven zijn de breedte, het verschil der oppervlakten en het verschil der delen van de lengte $k - m$. Gevraagd de stukken en de transversaal.

De tekst berekent zonder meer: (Fig. 5)

$$s = (F_1 - F_2) : (k - m)$$

$$t = \sqrt{\tfrac{1}{2}\{(b + s)^2 + s^2\}} - s$$

en gebruikt dan de betrekking

$$(F_1 - F_2)(b - t) = m(\tfrac{1}{2}b^2 - t^2)$$

om m en daarmede k te vinden. De formule voor de transversaal is evident als men de driehoek beschouwt als een deel van een rechthoekig trapezium, dat door de verlengde transversaal in twee gelijke delen wordt verdeeld. Immers dan is

$$F_1 + ms = F_2 + ks$$

$$(t + s)^2 = \tfrac{1}{2}\, s^2 + \tfrac{1}{2}(b + s)^2.$$

zijden neer. Dan ontstaan andere rechthoeken, die óók in twee gelijke delen worden verdeeld. Derhalve is (Fig. 2) rechthoek DRPQ gelijk aan rechthoek PTBS. Alle gewenste relaties kunnen nu direct uit de oppervlakten afgelezen worden. Bij voorbeeld:

$$\text{ATDQ} = \text{ARBS} \quad \text{dus} \quad ay = bx \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Waar de Babyloniër de deling uitvoert door het berekenen van de reciproke waarde [wij schrijven hier a^{-1} voor de reciproke waarde van a] komt hij tot de veelvuldig toegepaste uitspraak: $y = a^{-1}bx$, in de vorm:

y en x hebben de verhouding [BAL] $a^{-1}b$.

Vermenigvuldigt men beide leden van de gelijkheid met ax dan ontstaat

$$a^2xy = ab\,x^2$$

De verhouding van de oppervlakten van de driehoeken APT en ABC is als de quadraten der transversalen x en a.

Vermenigvuldigt men met by, dan ontstaat

$$ab\,y^2 = b^2\,xy$$

De verhouding van de oppervlakten van de driehoeken APT en ABC is als de quadraten van de rechthoekszijden y en b.

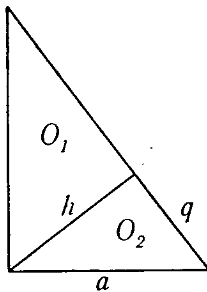


Fig. 3.

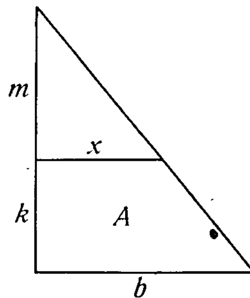


Fig. 4.

Door toepassing in een rechthoekige driehoek (Fig. 3) vindt men meteen de stelling van Pythagoras:

$$O = O_1 + O_2;$$
$$Oh^2 = O_1 a^2;$$
$$Oq^2 = O_2 a^2;$$
$$h^2 + q^2 = a^2.$$

Waar (Fig. 2) $\text{AC}^2 = a^2 + b^2$ wordt óók $\text{BD}^2 = a^2 + b^2 = \text{AC}^2$.

Waar de Babyloniër beschikte over het sexagesimale positiesysteem heeft hij zich over de existentie van irrationale grootheden geen zorgen gemaakt. Immers ook rationale, niet regulaire, getallen geven aanleiding tot het optreden van niet afbrekende sexagesimale breuken en de vraag naar de onderscheiding van rationale en irrationale grootheden doet zich dus niet zo klemmend voor als bij de Grieken, die alléén rationale getallen, in hun notatie, konden voorstellen. De Babyloniër gaf aan hoe men, bij voorbeeld bij quadraatwortels een boven- en een benedengrens kon berekenen en hoe men het aantal sexagesimalen willekeurig op kon voeren.

Hoe men de theorie van de regelmatige veelhoeken op kan bouwen zonder van het begrip „hoek" gebruik te maken zal duidelijk zijn: een regelmatige veelhoek wordt gedefinieerd als een veelhoek, die alle zijden gelijk heeft en waarin alle diagonalen van hetzelfde type gelijk zijn. De existentie van een om- en ingeschreven cirkel speelt dan voor de berekeningen verder geen rol. Aangezien wij bij de bespreking van de Griekse meetkunde op dit onderwerp terugkomen volstaan wij hier met deze aanduiding.

Griekse Meetkunde.

Voor de Griekse meetkunde is het optreden van het begrip „hoek" en het struikelblok, dat door de irrationale grootheden gevormd wordt, opvallend. Gezien hun opmerkingen over Thales, — opmerkingen, die wellicht historisch gezien nog onhoudbaar zijn ook — waren de Grieken bijzonder trots op de invoering van dit begrip. Men moet echter toegeven, dat bij de opbouw van de meetkunde dit invoeren volledig overbodig is en het gebruik van „hoeken" aanvankelijk als een misslag kan worden gezien.

Wanneer de Griek het begrip „hoek" wil vastleggen dringt zich onmiddellijk het hoekbegrip tussen twee krommen op. Dadelijk al bij het beschouwen van de hoek tussen een cirkel en een van zijn raaklijnen komt men dan op moeilijkheden: men stoot op „niet-Archimedische grootheden". Immers als de straal van de cirkel verandert heeft men aanvankelijk de indruk, dat de hoek óók verandert. Maar men kan net zo veel hoeken tussen cirkel en raaklijn bij elkaar optellen, zonder ooit een hoek tussen twee nog zo weinig verschillende rechten te bereiken. Hierin ligt wel de grond voor het onmiddellijk onderscheiden van een hoek tussen twee krommen en een hoek tussen twee rechten in Euclides' omschrijvingen.

Speciale formules als: de oppervlakte van een rechthoekig trapezium is de hoogte vermenigvuldigd met de transversaal in het midden van de hoogte, loodrecht daarop getrokken, de verdeling van een gelijkbenig trapezium in een rechthoek en twee rechthoekige driehoeken worden gevonden. Een gelijkbenige driehoek wordt door een hoogtelijn op de basis in twee rechthoekige verdeeld.

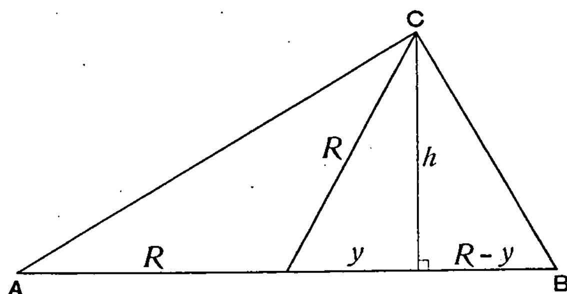


Fig. 6.

Algemene ongelijkzijdige driehoeken komen niet voor. Waarschijnlijk, omdat door verdeling met een hoogtelijn steeds tot rechthoekige driehoeken kan worden teruggegaan. Delen van cirkels en de bijbehorende pijlen en lengten van koorden worden opgegeven in een oud-Babylonische tabel van constanten. Wellicht werd reeds in die tijden gebruik gemaakt van de rechte hoek in de cirkel op de middellijn. Direct toegepast vindt men dit eerst in teksten van latere tijd. De stelling ligt echter zeer voor de hand: (Fig. 6)

$$\mathrm{AC}^2 = (R + y)^2 + h^2,$$
$$\mathrm{BC}^2 = (R - y)^2 + h^2,$$
$$\mathrm{R}^2 = y^2 + h^2,$$

leveren $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 = 2\mathrm{R}^2 + 2y^2 + 2h^2 = 4R^2 = \mathrm{AB}^2$; AC is loodlijn op BC! Uit deze enkele voorbeelden kan voldoende blijken, dat een opbouw van de Meetkunde hoekvrij, uitsluitend met het „schietlood" werkende, zeer wel mogelijk is; het is wel niet te veel gezegd, wanneer men deze eenvoudiger noemt. Zodra men zich beperkt tot het berekenen van lijnstukken, oppervlakten en volumina kan men directer en eenvoudiger de resultaten van de Euclidische meetkunde verkrijgen door de „hypothese van de rechte hoek" en de techniek van de additie van oppervlakten. Bewijzen zijn dan verder geheel overbodig. „De Methode" is essentieel en volledig afdoende.

niet afbrekende antanairesis tot een einde werd gebracht. Wat hiermede onderscheiden wordt is dus hetzelfde als in moderne schrijfwijze in

$$\sqrt{2} = 1,4142\ldots\ldots \quad \text{en} \quad \sqrt{\dot{2}} = 1,4142$$

Wij lichten dit nader toe. Wanneer men de diagonaal van een vierkant d aan een zijde a toevoegt kan men een groter vierkant maken, dat de zijde $A = a + d$ en de diagonaal $D = 2a + d$ heeft. Herhaalt men dit proces, dan ontstaat uitgaande van een eerste benadering d en a een rij steeds groter wordende getallen, die de quadraatwortel van twee steeds beter benaderen. Er geldt namelijk

$$D^2 - 2A^2 = (d+2a)^2 - 2(d+a)^2 = 2a^2 - d^2 = \text{constant op teken na!}$$

Men heeft op deze wijze meetkundig verkregen een omkering van de „antanairesis" een balancerend toenemen, een „antanarsis".
De betrekkingen

$$D = 2a + d, \quad A = a + d,$$

laten zich eenvoudig omkeren tot de „antanairesis"

$$a = D - A, \quad d = 2A - D,$$

zoals meetkundig ook evident is, (Fig. 8a, b).

Deze antanairesis komt nimmer tot een einde. Wanneer men echter op een gegeven moment een „klein stukje" heimelijk wegneemt ontstaat een beeindiging van het proces door „anthyphairesis". Verwaarloost men tenslotte a, dan is voor de voorafgaande trap $D = A$ en $d = 2A - D = D$. De „anthyphairesis" levert dus bij omkering het afbreken van de „antanarsis" na een zeker aantal stappen:

1,1; 3,2; 7,5; 17,12; etc.

In direct verband met deze existentievragen staat de vraag naar de oppervlakte van een gebied, dat door kromme lijnen omsloten wordt. Kan zulk een gebied een „oppervlakte" bezitten? Dat dit in bijzondere gevallen kan werd aangetoond door de „Maantjes van Hippocrates"! Maar dat men de oppervlakte van een cirkel kon verkrijgen door die van een veelhoek te berekenen en dan het aantal zijden onbegrensd te laten toenemen werd door enkele „sophisten" bestreden. De exhaustiemethode werd echter door Archimedes met succes toegepast. Er werd een theorie van evenredigheden ontwikkeld in een vorm, die voor rationale en irrationale grootheden gelijkelijk gold, dank zij Eudoxos' „Axioma van Archimedes". Kortom, zoals de staatkundige toestanden in Perzië de Grieken er toe brachten om te philosopheren over „De Staat", zo ook leidde

De meetkundig irrationale verhouding is vermoedelijk het eerst opgemerkt bij de verhouding van zijde en diagonaal van de regelmatige vijfhoek, een symbool der Pythagoreërs, en daarna bij de zijde en de diagonaal van het vierkant: deze laatste ligt ook minder voor de hand dan die voor de vijfhoek! Immers als men een gemene

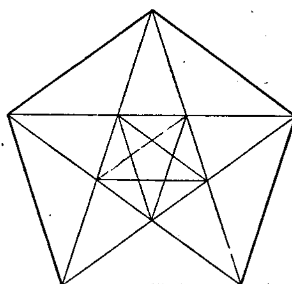


Fig. 7.

maat zoekt van diagonaal en zijde van de vijfhoek, dan ziet men hoe de diagonalen van een vijfhoek een kleinere vijfhoek insluiten. Uit de gelijkheid van overstaande zijden van de vele parallelogrammen ziet men onmiddellijk in (Fig. 7):

$$\mathrm{D} - \mathrm{A} = d; \qquad \mathrm{A} - d = a$$

Een gemene maat van D en A is dus een gemene maat van de veel kleinere d en a, en is dus kleiner dàn elke aan te geven lengte.

De vraag naar „de existentie van de limiet" is karakteristiek voor de problemen der Grieken. Zij bracht er toe, dat grootheden werden gezien als lijnstukken of als oppervlakten. Zij bracht tot theoretische

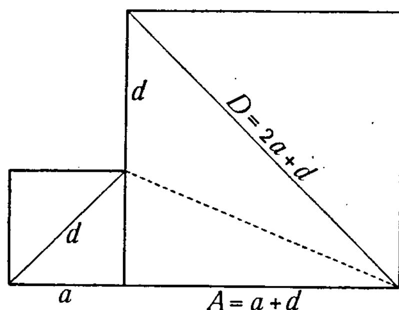


Fig. 8a.

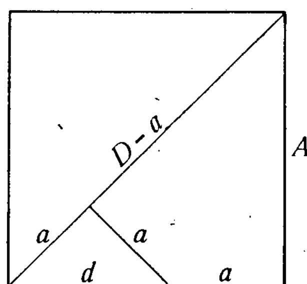


Fig. 8b.

onderzoekingen over de ἀνταναίρεσις, de „antanairesis", het beurtelings balancerend wegnemen, en de ἀνθυφαίρεσις, de „anthyphairesis", het balancerend verdonkeremanen, waardoor eèn

van de basis gelijk." Men realiseert zich niet, dat toepassing van de vierde stelling van het eerste boek tot het gewenste resultaat leidt; omdat daar niet van een bissectrix gesproken wordt . . . en men „begint" dus met de derde stelling van het zesde boek aan te halen!

Ook Archimedes, wiens grote vondst ligt in het begrip „moment", leidde zijn grote wiskundige ontdekkingen eerst „mechanisch" af om dan later een inpassing in de rijtjes uit te voeren. Vindt hij de beroemde relatie tussen de inhoud van een kegel, een cylinder en een bol als 1 : 2 : 3 (Fig. 9, 10) niet uit de betrekking

$$x^2 + y^2 = ax, \quad \text{dus}$$
$$a(x^2 + y^2) = a^2 x,$$

waaruit volgt, dat de totale massa van kegel en bol op afstand a geplaatst een cylinder met as op $\frac{1}{2}a$ in evenwicht houdt, als de doorsnede een rechthoek is met zijden a en $2a$? Eerst daarna zijn verificaties gegeven met „zuiver meetkundige" methoden. Is ook de bepaling van het volume van de cylinderhoef en van de oppervlakte van het paraboolsegment niet eerst „mechanisch" afgeleid?!

Naast deze philosopherende meetkunde, waarvan de draagwijdte en de resultaten genoegzaam bekend zijn, de meetkunde, die zich te weer moest stellen tegen de aanvallen van sophisten, ontwikkelde zich de „rekenende meetkunde" min of meer onafhankelijk verder. Ter verduidelijking bespreken wij slechts twee gevallen:

A. De berekening van regelmatige veelhoeken en de zevenhoeksconstructie, die, wellicht ten onrechte, aan Archimedes wordt toegeschreven.

B. De berekeningen betreffende het icosaeder van Heron en Pappos.

A. De „stelling van Ptolemaios" is geenszins noodzakelijk ter bereiking van de resultaten van Heron en Archimedes over de regelmatige veelhoeken! Uit de rechte hoek in de halve cirkel en gelijkstelling van oppervlakten volgen zonder meer formules voor verdubbeling en verveelvoudiging van koorden en past men splitsingen toe, zoals die bij de Babyloniërs in de oudste tijden reeds gevonden worden, dan heeft men: (Fig. 11)

voor de rechthoek: $d^2 = a^2 + b^2$;
voor het gelijkbenig trapezium: $d^2 = c^2 + ab$;
de verdubbelingsformule: $d_1 \mathrm{D} = 2a\sqrt{\mathrm{D}^2 - a^2}$, of
$d_1^2 : a^2 = 4(\mathrm{D}^2 - a^2) : \mathrm{D}^2$

het aanwezige materiaal aan Egyptische en Babylonische resultaten in Rekenkunde en Meetkunde tot een streven naar precisering van inhoud en onderlinge relatie van bekende eigenschappen, tot uitbreiding van de „Rijtjes" van de Babylonische serieteksten. Het is wel geen toevalligheid, in dit verband, dat de zogenaamde „Elementen" van Euclides en van zijn voorgangers, de titel *Στοιχεῖα* „Stoicheia", dat is oorspronkelijk „Rijtjes" dragen. Het moge zijn, dat men van modern standpunt deze rijtjes als een axiomatisch bouwwerk is gaan zien, zij het dat daaraan nog veel onvolkomenheden kleven, geheel zeker, dat men deze samenvattingen anders moet zien dan als een „rijtje" met verwijzingen naar reeds vroeger verkregen resultaten en het duidelijk aangeven, dat men over sommige *κοιναὶ ἔννοιαι* „koinai ennoiai" dan niet [of juist wel?] verder diende te discussiëren, zijn wij niet. Wij zien de rijtjes meer als een resultaat van een analyse, ontstaan door voortdurend verweer tegen aanvallen van zekere „sophisten" om tenslotte díe „koinai ennoiai" uit te pellen, die men zou moeten aanvechten om iets van wat verder als juist is aangegeven te kunnen weerleggen. Zulks te meer, waar de wiskundigen de „rijtjes" vaak op een zonderlinge wijze gebruikten!! Men beriep zich op de Stoicheia niet als op de ENSIE maar als op de Winckler-Prins-encyclopaedie! Het gaat om een „slagwoord" en niet om een systeem. Wanneer men de stelling nodig heeft, dat de bissectrix van de tophoek van een gelijkbenige driehoek de basis halveert vindt men redeneringen als volgt:

„Aangezien de bissectrix de overstaande zijde verdeelt in stukken, die zich verhouden als de omliggende zijden en de omliggende zijden in een gelijkbenige driehoek gelijk zijn, zijn ook de stukken

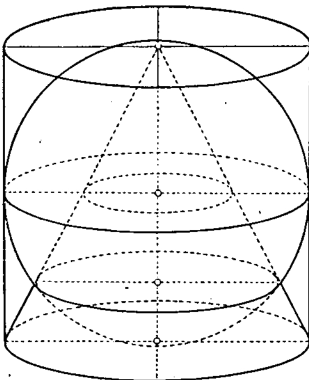


Fig. 9.

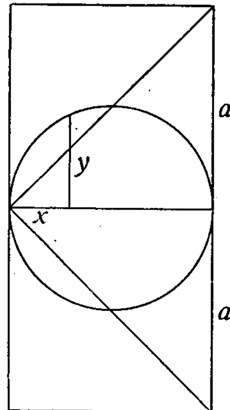


Fig. 10.

voor de *volgende diagonaal,* direct uit het gelijkbenig trapezium,

$$d_1^2 = a^2 + ad_2.$$

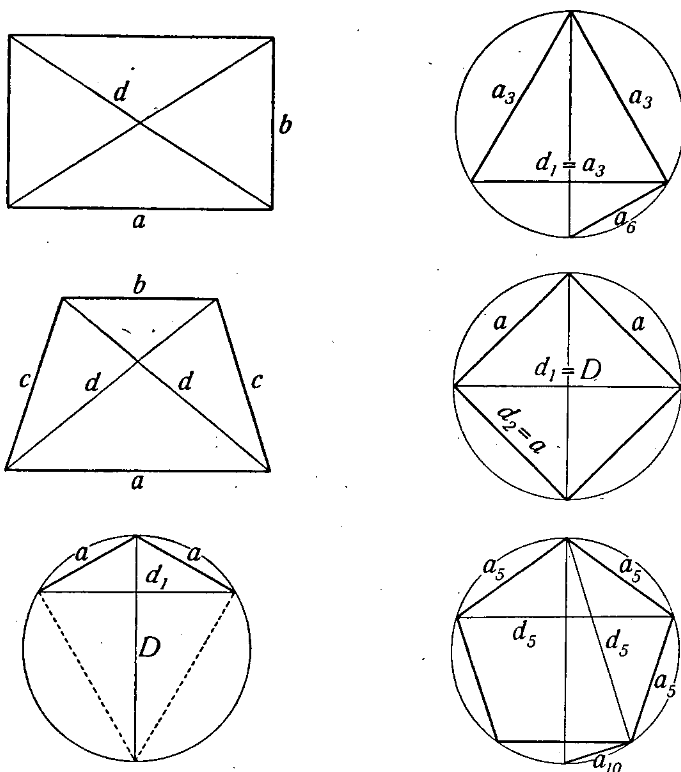


Fig. 11.

Voor de regelmatige *driehoek* is $a = d_1$, dus $4a^2 = 3D^2$.

Voor de regelmatige *zeshoek* geldt dan

$$Da_3 = 2a_6 \,.\, a_3, \qquad 2a_6 = D.$$

Voor de regelmatige *vierhoek* is $d_2 = a$, $d_1 = D$, dus $D^2 = 2a^2$.

Voor de regelmatige *vijfhoek* is $d_2 = d_1 = d$, dus

$$d^2 = a^2 + ad, \quad 5d^2 = (2a + d)^2.$$

Voor de regelmatige tienhoek volgt:

$$a_5D = 2d_5a_{10},$$ waarin d_5 = diagonaal van de vijfhoek.

Hieruit volgt dus

$$Ra_5 = a_{10}\, d_5$$
$$4R^2 = d_5^{\,2} + a_{10}^{\,2}$$
$$R(R - a_{10}) = a_{10}^{\,2}$$

dus

$$4R^2\, a_{10}^{\,2} = a_{10}^{\,2}\, d_5^{\,2} + R^2(R - a_{10})^2 \text{ of}$$
$$4a_{10}^{\,2} = a_5^{\,2} + (R - a_{10})^2, \; a_5^{\,2} = a_{10}^{\,2} + R^2.$$

De *derde diagonaal* ontstaat uit de „verdubbelingsformule" van de eerste diagonaal dus:

$$d_3^{\,2} : d_1^{\,2} = 4(D^2 - d_1^{\,2}) : D^2 = (D^2 - 2a^2)^2 \times 4 : D^4$$
$$d_3 : d_1 = (2D^2 - 4a^2) : D^2.$$

Voor een zevenhoek moet nu gelden $d_2 = d_3$! Tevens geldt ongeveer $7a = 3D$. Nu is $49/9 = 5 +$ een derde $+$ een negende. Stel dus $3D^2 = 16a^2$, dan volgt

$$d_1^{\,2} : a^2 = 52 : 16 = 13 : 4$$
$$d_2 : a = 36 : 16 = 9 : 4;$$
$$d_3 : d_1 = 20 : 16 = 5 : 4;$$

derhalve

$$d_2^{\,2} : a^2 = 81 : 16 = 324 : 64 \text{ en}$$
$$d_3^{\,2} : a^2 = 25 \times 13 : 64 = 325 : 64.$$

Dit laatste verschilt slechts één eenheid, de fout bedraagt dus slechts een zeshonderdvijftigste!! Stelt men $3D^2 = 16a^2$, dan volgt $3R^2 = 4a^2$, waaruit $a_7 = \frac{1}{2}a_3$. Deze relatie vindt men bij Heron opgegeven en dit is een betrekking, die men zeer vaak toegepast vindt, in latere tijd. Het enige wat, uit Arabische bron, over de bemoeiingen van Archimedes met de zevenhoek wordt opgegeven volgt uit: (Fig. 12a)

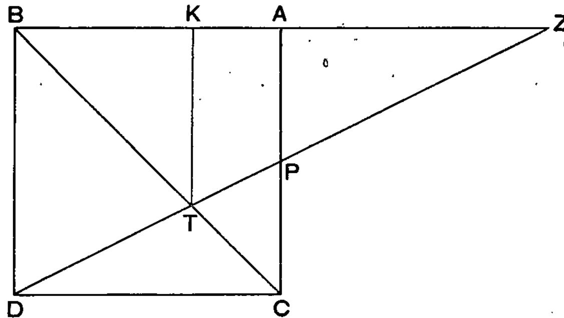


Fig. 12a.

„Als BC de diagonaal van een vierkant ABCD is en de transversaal DTPZ is zo getrokken, dat de driehoeken DTC en PAZ gelijke oppervlakten hebben, dan trekt men de loodlijn door T op AB en

$$ZK \times AK = BK^2; \qquad AB \times BK = AZ^2\text{''}$$

De commentatoren voegen dan toe: Archimedes construeert dan een driehoek met zijden BK, KA en AZ; verlengt de zijde AZ aan beide zijden zó, dat het verlengde gelijk is aan de aanliggende zijde en construeert de omgeschreven cirkel van de aldus verkregen driehoek.

Hierover is veel geschreven en geprobeerd. Geen van de methoden komt ons in het Griekse schema passend voor en is directer dan de volgende opmerking, die de behandeling geheel in de Babylonische spheer brengt.

Uit de eigenschappen van de gelijkbenige trapezia heeft men onmiddellijk:

$$d_2^2 = d_1(a + d_1); \quad d_1^2 = a(a + d_2).$$

Trekt men een transversaal door een rechthoek, dan heeft men steeds (Fig. 12b)

$$I + II = III + IV$$
$$II = III$$
$$\text{dus } I = IV \text{ of } h_1 x = h_2 z.$$

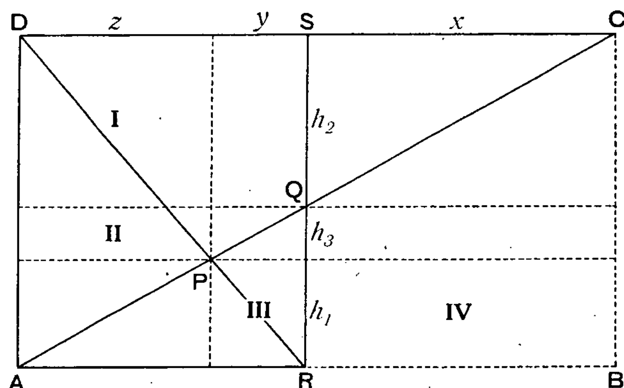


Fig. 12b.

Neemt men hierbij de voorwaarde, dat de driehoeken CSQ en PAR gelijke oppervlakte hebben, dan geldt ook:

$$h_2 x = h_1(y + z)$$

Vermenigvuldiging van beide linker- en rechterleden en wegdeling van de factor h_1h_2 levert de algemene betrekking

$$x^2 = z(y + z).$$

De eerstgenoemde betrekking tussen de oppervlakten levert

$$h_1(x + y) = z(h_2 + h_3)$$

Voor de relaties van de zevenhoek, dient men nog te beschikken over

$$y(x + y) = z^2$$

en dit zal het geval zijn als $h_1 = y$ en $h_2 + h_3 = z$. Dat is zo als de rechthoek ARDS een vierkant is! Veegt men alle overbodige lijnen voor de constructie weg, dan blijft over: het vierkant ARDS met de digonaal DR en de transversaal APQC zó getrokken, dat SQC en APR gelijke oppervlakte hebben. De loodlijn uit P verdeelt dan de zijde DS in de stukken z en y en de betrekkingen tussen x, y, z zijn dezelfde als die tussen d_2, a, d_1 van de zevenhoek. Deze is uit deze stukken dus op te bouwen. Heeft men echter dit resultaat afgeleid, dan is een directe aantoning van de betrekkingen natuurlijk nog eenvoudiger. Men heeft $h_1 = y$ en uit de gelijkheid der oppervlakten van SCQ en APR

$$h_2x = y(y + z)$$

De rechthoeken om QC leveren

$$x(y + z) = h_2(x + y + z) = (h_2 + y)(y + z), \text{ dus } x = h_2 + y$$

Uit de onderste strook, waarvan de oppervlakte dus x^2 is, leest men dan direct af

$$x^2 = yz + z^2 = z(y + z),$$

terwijl

$$z^2 = y(x + y)$$

evident is.

B. Het numeriek vastleggen van een irrationaal getal door een rationale benadering kan tot absurde resultaten leiden, wanneer men met deze waarde normaal en correct verder rekent: immers in de loop van de berekening kan de fout, waarmede de rationale benadering nu eenmaal behept is, willekeurig vergroot worden. Ongetwijfeld heeft dit de Grieken er toe gebracht om bepaalde irrationale grootheden vast te leggen door hun meetkundige betekenis: de zijde van de tienhoek, de zijde van de vijfhoek, de diagonaal van de vijfhoek. Tussen deze irrationale grootheden worden dan exacte relaties vastgelegd.

Pappos bewijst het feit, dat icosaeder en dodekaeder beschreven in eenzelfde bol ook aan eenzelfde bol ombeschreven zijn door te wijzen op het feit, dat als de stralen van de omgeschreven cirkels r van de zijvlakken van deze lichamen gelijk zijn, óók de stralen R van hun ingeschreven bollen gelijk zijn. Dit laatste wordt dan als volgt verkregen:

Voor het dodekaeder, lettende op de kubus gevormd door telkens acht hoekpunten, (Fig. 13)

$$D^2 = 3d^2 = \frac{a_3^2}{a_6^2} d^2, \qquad \mathrm{D} = \frac{a_3}{a_6} d.$$

Daar $d \times a_6 = r \times d_5$ en $d_5 \times a_{10} = a_5 \times a_6$ is $\mathrm{D} = \dfrac{a_3\, a_5}{a_6\, a_{10}} r.$

Voor het icosaeder geldt: (Fig. 14)

$a \times a_6 = r \times a_3;$

$$d \times a_5 = a \times d_5,\ \mathrm{D}^2 = d^2 + a^2 = \frac{a_6^2 + a_{10}^2}{a_{10}^2} a^2 = \frac{a_5^2}{a_{10}} a^2$$

$$= \frac{a_5^2\, a_3^2}{a_6^2\, a_{10}^2} r^2; \quad \text{dus} \quad \mathrm{D} = \frac{a_3\, a_5}{a_6\, a_{10}} r.$$

Beide resultaten bevatten dus dezelfde betrekking!

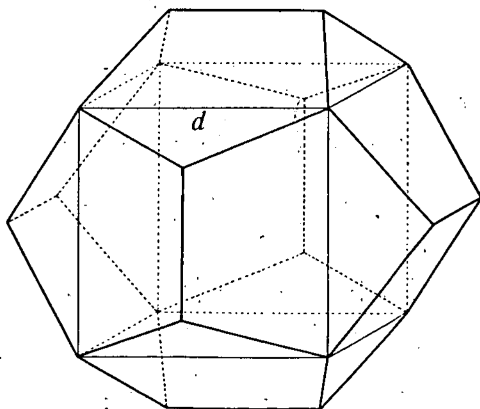


Fig. 13.

Men zou nu verwachten, dat de straal van de ingeschreven bol R nu direct door toepassing van de stelling van Pythagoras zou worden verkregen. Dit is echter niet het geval. Pappos leidt eerst een hulpstelling af, die inhoudt:

$$a_6^2 : 5(a_6 - a_{10})^2 > 4/3 > 1.$$

Eenvoudigheidshalve schrijven wij hier:

$$\beta = a_6^4 : 5a_{10}^4 > 4/3.$$

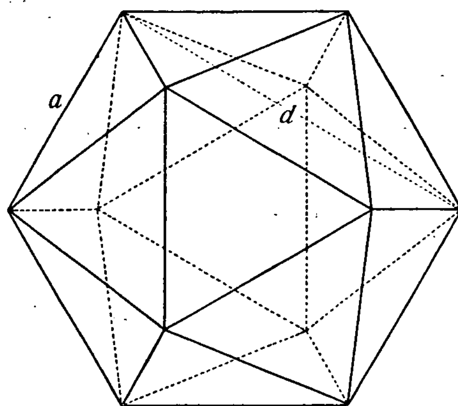


Fig. 14.

Pappos' redenering op de voet volgend, zonder ons echter direct op een numerieke waarde $\alpha = 4$ vast te leggen, verkrijgen wij: Als

$$\alpha\, a_{10} > a_6$$

dan is

$$\alpha\, a_{10}(a_6 - a_{10}) > a_6(a_6 - a_{10})$$

terwijl

$$\alpha\, a_{10}^2 = \alpha\, a_6(a_6 - a_{10}).$$

Optellende volgt nu

$$\alpha\, a_6 a_{10} > (\alpha + 1)\, a_6(a_6 - a_{10})$$

Maar

$$(\alpha + 1)\, a_6 a_{10} = (\alpha + 1)\, a_6 a_{10}$$

en opnieuw optellende

$$(2\alpha + 1)\, a_6 a_{10} > (\alpha + 1)\, a_6^2.$$

Van modern standpunt gezien kan dit proces steeds worden voortgezet en leidt dan tot een reeks verhoudingen die beurtelings groter en kleiner zijn dan $a_{10} : a_6$ namelijk:

$$1/\alpha;\quad \alpha/(\alpha + 1);\quad (\alpha + 1)/(2\alpha + 1),\ (2\alpha + 1)/(3\alpha + 2), \ldots, t/n,\quad n/(t + n).$$

Voor $\alpha = 1$ verkrijgt men de kettingbreuk voor $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Dan leidt Pappos met behulp van de betrekking

$$a_6^2 = 3(a_6 - a_{10})(2a_{10} - a_6) + 5(a_6 - a_{10})^2$$

af dat

$$a_6^2 : 5(a_6 - a_{10})^2 = 3(2a_{10} - a_6) : 5(a_6 - a_{10}) + 1 = (13\alpha + 8) : (10\alpha + 5).$$

Waar Pappos van meet af aan $\alpha = 4$ stelt, verkrijgt hij voor de laatste waarde 4/3.

Fig. 15.

De verhouding a : R wordt nu door Pappos als volgt geschat: (Fig. 15)

$$KX = KC \text{ levert } EX = a_{10}$$

$$BD = a_5,\ NI = \tfrac{1}{6} KL,\quad 3BD^2 = LI^2$$

$$ON : NI = EC : KC,$$

$$ON^2 : NI^2 = EC^2 : KC^2 = 20\beta : 1$$

Met $\beta > 1$ vervolgt Pappos

$$ON^2 > 20\,NI^2$$

$$36\,ON^2 > 720\,NI^2 = 80LI^2 = 15\,BD^2$$

$$12\,ON^2 > 5\,BD^2.$$

Wanneer Pappos zijn scherpere relatie $\beta > 4/3$ had toegepast zou hij verkregen hebben

$$12\,ON^2 > 20\,BD^2/3 \text{ of } 9\,ON^2 > 5\,BD^2$$

en uit deze betrekking volgt dan

$$ON : BD = \sqrt{5} : 3 \sim 2\tfrac{1}{4} : 3 = 3 : 4$$

een betrekking, die in lateren tijd wordt toegepast.

Ten tijde van Heron nam men als corresponderende waarde van $a_6 = 8$, de waarde $a_{10} = 5$. Dan zou de grootheid β kleiner dan 4/3 worden! De beste, eenvoudige waarde van β volgt dan als 9/7. De corresponderende grootheid levert dan

$$12\ ON^2 = 45\ BD^2/7 \text{ of } 28\ R^2 = 15a^2.$$

Door worteltrekking verkrijgt men dan

$$a : R = \sqrt{28} : \sqrt{15} = 5^7/_{24} : 3\tfrac{7}{8} = 127 : 93,$$

een waarde, die in Heron's Metrica wordt opgegeven.

Dat Pappos de scherpere schatting $\beta > 4/3$ afleidt zonder er gebruik van te maken, moet wel haast worden toegeschreven aan het feit, dat hij hierin een belangrijke verscherping zag, welke hij om haarzelf afleidde. De kloof, die er is tussen de Griekse schattingen en de moderne kettingbreuk wordt hiermede duidelijk voor ogen gesteld, terwijl tevens blijkt hoeveel moeilijkheden het ontbreken van een „wortelsymbool" in de meetkundige beschouwingen van de Grieken heeft veroorzaakt.

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR DE STAATSEXAMENS H.B.S. IN 1957

WISKUNDE I

h.b.s. B

De commissie constateert, dat de resultaten van het mondelinge examen reden geven tot tevredenheid. Vele kandidaten hadden zich voor dit deel beter voorbereid, dan vroeger het geval was. Opgemerkt kan nog worden, dat enkele kandidaten ten onrechte van mening waren dat de factorenstelling — en de reststelling — niet behoeven te worden gekend.

WISKUNDE II

h.b.s. B

De gevraagde „korte toelichting" bij de oplossing van de vraagstukken in de *beschrijvende meetkunde* is een verbetering. Hierdoor was het gemakkelijker om onduidelijke delen van het tekenwerk te ontwarren. Ook kon nauwkeuriger de waarde van een fout worden vastgesteld, doordat men nu kon onderscheiden tussen een fout in stereometrisch inzicht en in tekentechniek.

Dat de gegeven en gevraagde elementen in de opgaven met letters genoemd worden, vereenvoudigt de correctie. Het verdient aanbeveling, dat ook de kandidaten de door hen ingevoerde elementen benoemen. Dus niet schrijven: „Breng een vlak door l en evenwijdig met m", maar: „Breng vlak A door l en evenwijdig met m; zie m_1" als er een hulplijn m_1 gebruikt is.

WISKUNDE

„Artikel 3"

Vele kandidaten hadden zich slecht — of in het geheel niet — voorbereid. Zij hadden zich onvoldoende rekenschap gegeven van de eisen, zoals die voor dit onderzoek zijn gesteld. Zo kwam het enige malen voor, dat aan de *stereometrie* niets was gedaan.

Er moet worden opgemerkt, dat niet alleen de kwadratische functie moet worden bestudeerd, maar ook de lineaire. Het tekenen van grafische voorstellingen van beide functies moet naar het oordeel van de commissie kunnen worden uitgevoerd. Het bleek dat slechts een enkeling daartoe in staat was.

WISKUNDE

h.b.s.-A

De resultaten van het schriftelijk examen waren dit jaar iets minder dan verleden jaar. Verschillende kandidaten slaagden er bij het mondeling gedeelte van hun examen in hun cijfer enigszins te verbeteren. Toch moest de commissie ook bij het mondelinge examen meermalen een volledig gebrek aan inzicht in wiskunde of in belangrijke onderdelen daarvan constateren.

Met name hadden verschillende kandidaten helemaal geen begrip van functies en hun grafieken, terwijl bij de meetkunde het construeren van lijnstukken dikwijls niet bekend bleek.

Verwisseling van benamingen als, de helft in plaats van het midden en vergelijking in plaats van functie, kwam veelvuldig voor. Herhaaldelijk hoorde de commissie de meest zonderlinge definities.

De conclusie is, dat er nog steeds te veel kandidaten, niet of nauwelijks voorbereid aan het examen deelnemen.

MECHANICA

h.b.s.-B

De resultaten, behaald bij het schriftelijk examen, verschilden niet opvallend van die in andere jaren. Het kwam nogal eens voor dat de figuren, aan de hand waarvan de vraagstukken moesten worden opgelost, getekend waren zonder dat rekening was gehouden met de numerieke gegevens, hetgeen fouten in de berekening veroorzaakte. Het verdient sterke aanbeveling, de tekeningen netjes, en in de goede verhoudingen, uit te voeren, en ze niet als „kladfiguurtjes" te beschouwen en te behandelen. Verscheidene kandidaten schreven onduidelijk en slordig, zodat het nogal veel tijd en moeite kostte om te ontcijferen wat er stond, vooral als de gedachtengang van de kandidaten bij de oplossing afweek van de meest voor de hand liggende en men de bedoeling moest zoeken. In enkele gevallen was nauwelijks of geen verschil te zien tussen de letters r, v, M, en het getal 2; of tussen K en R, of N en H. Ongeveer de helft van het aantal kandidaten, die een mondeling examen moesten afleggen, wisten het resultaat daarbij enigszins te verbeteren.

De studerende moet er zich steeds rekenschap van geven wààr, en in welke richting, krachten moeten werken om een bepaalde waargenomen evenwichtsstand of beweging tot gevolg te hebben. In het dagelijks leven zijn genoeg gevallen, die daartoe aanleiding kunnen geven. Enige oefening daarin kan voor hem of haar het vak minder abstract maken.

UIT HET VERSLAG VAN DE STAATSEXAMENCOMMISSIE-1957

WISKUNDE

In het verslag van 1955 (ook opgenomen in „Euclides" van 1 november 1956, 32e jaargang no. III) is een uitvoerige uiteenzetting gegeven van de eisen, die op het examen worden gesteld. Toch moest de subcommissie dit jaar nog verscheidene malen constateren, dat kandidaten van deze eisen niet op de hoogte waren. Bestudering van genoemd verslag acht de subcommissie voor een verantwoorde voorbebereiding noodzakelijk.

A-kandidaten, die wel van $3x^2 + x - 5$ door een kwadraat af te splitsen de uiterste waarde kunnen bepalen, maar onoverkomelijke moeilijkheden ondervinden bij de functie $-2x^2+8$, demonstreren hiermee onvoldoende inzicht in deze materie. Wederom bleek, dat het gebruiken van een Y-as een grote handicap vormde bij het ontwerpen en lezen van grafieken.

Strijdigheid en afhankelijkheid van vergelijkingen, invoeren en verduisteren van wortels waren onderwerpen, die door veel kandidaten niet voldoende werden beheerst.

Bij de meetkunde-examens bleek dikwijls, dat inhouden, cilinders, kegels en bollen niet waren bestudeerd. Een constructie in een gegeven stereometrische figuur moet men vlot kunnen uitvoeren. De subcommissie denkt hierbij aan het bepalen van het snijpunt van een lijn en een vlak, aan doorsneden en aan constructies van punten, lijnen en vlakken, die aan gegeven voorwaarden voldoen.

In het verslag van 1955 staat een zinsnede, die uit haar verband gerukt, aanleiding kan geven tot misverstand. De zin „Men kan volstaan met het kennen van de stelling van Pythagoras" hebben sommige kandidaten te letterlijk opgevat. Men moet van de meetkunde ook de volgende onderwerpen zeker bestudeerd hebben: gelijkvormigheid, meetkundige plaatsen, bijzondere vierhoeken, merkwaardige lijnen in een driehoek, constructies, oppervlakten en cirkels (het verband tussen hoeken en bogen); de machtstelling; om-en ingeschreven cirkels, waarbij uiteraard de beperkingen opgesomd in het verslag van 1955 gelden.

Bij de analytische meetkunde waren de kandidaten dikwijls niet in staat een verantwoorde keuze te doen tussen de twee methoden voor het bepalen van een meetkundige plaats. Sommige B-kandidaten meenden, dat de trigonometrie verwaarloosd kan worden. Dat dit een misverstand is, behoeft niet nader te worden toegelicht.

Het gemiddelde cijfer door de A-kandidaten behaald, bedraagt voor de stelkunde 4,8 (4,8); voor de meetkunde 4,8 (4,7). Voor de B-kandidaten bedragen deze cijfers voor de stelkunde 5,9 (5,5); voor de meetkunde 5,5 (6,4) en voor de trigonometrie en analytische meetkunde 6,3 (5,6).

BOEKBESPREKING

Ir F. Harkink, *Gerichte vlakke driehoeksmeting en elementaire landmeetkundige berekeningen*. Tweede druk. N.V. Uitgeverij Argus, Amsterdam. z.j. Prijs *f* 14.50.

De eerste uitgave van dit leerboek voor de landmeetkundige opleiding is indertijd in dit tijdschrift gunstig beoordeeld. Deze herdruk bewijst dat het veelvuldig wordt gebruikt. In verband met nieuwe voorschriften voor de werkzaamheden van het kadaster heeft de auteur het op een aantal plaatsen herzien.

Voor de lezers van *Euclides* kan het boek de betekenis hebben van een voorbeeld van de toepasbaarheid der wiskunde op vraagstukken van praktisch karakter. De schrijver bespreekt niet alleen deze opgaven zelf, maar ontwikkelt in zijn boek ook het mathematische apparaat dat hij daartoe behoeft, namelijk de (vlakke) trigonometrie en de beginselen der analytische meetkunde. Twee tendenties zijn voorts van belang. In de eerste plaats wordt veel aandacht gegeven aan de wijze waarop de berekeningen praktisch zo efficient mogelijk kunnen worden uitgevoerd; gesproken wordt over de rekenhulpmiddelen (machines en tabellen) die kunnen worden gebruikt, over systematische uitvoering der bewerkingen met behulp van schema's, over controles op uitkomsten etc. Dit alles gebeurt van het begin af; de meer theoretische uiteenzettingen zijn compositorisch niet streng van de toepassingen gescheiden. Dit geeft aan het werk een levendig karakter en maakt het

waarschijnlijk als leerboek voor het beoogde doel zeer geschikt. Een neiging van de schrijver is daarbij nog om de berekeningen zo te laten verlopen, dat zij niet door een figuur behoeven te worden begeleid en gesteund, zodat concentratie op het rekentechnische deel mogelijk is. Een consequentie daarvan is een tweede karakteristiek van het boek, die ook in de titel tot uitdrukking komt: het werkt systematisch met gerichte afstanden en hoeken. In de trigonometrie oriënteert de schrijver onafhankelijk van elkaar de lijnen waarop telkens twee hoekpunten van de driehoek liggen en sluit dan zijn definitie van de hoeken van de driehoek daarbij aan. Zo komt men dus ook driehoeken met twee positieve zijden en een negatieve tegen. Als een resultaat van de tekenafspraken luidt b.v. de formule voor het oppervlak 2 0 = —absin γ.

Het werk is duidelijk geschreven en de uitgave goed verzorgd. Oefeningen (met de uitkomsten) zijn toegevoegd.

Voor kritische opmerkingen is weinig aanleiding. I. 3. 7. over het zwaartepunt vinden wij in de tekst weinig passend; bij de grondformules van de goniometrie (p. 36) hadden wij zeker in dit boek verwacht Sin $(-\varphi) = -\text{Sin}\,\varphi$ en niet Sin $(400-\varphi) = -\text{Sin}\,\varphi$; de redactie van II. 1. N. kan ons niet bekoren.

O. Bottema

EEN GEDICHT VAN EUCLIDES?

door

Dr. C. J. Vooijs

In de helleense letterkunde treffen we gedichten aan afkomstig uit kringen van oud-griekse wiskundigen, met rekenkundige inhoud. Eén daarvan wordt bijv. door Gemma Frisius[1]) en Brunck[2]) op naam van Euclides gesteld, anderen, zoals Bachet[3]), noemen geen auteur. Dit is een ingekleed rekenkundig vraagstuk in dactylische hexameters. Voor de authenticiteit van dit versje zijn de aanwijzingen schaars, zodat een beslissing niet zonder bezwaar is. Hoe het ook zij, we vinden hier in elk geval een goed voorbeeld van de crustula blanda, waarmee antieke paedagogen de wiskunde aanlokkelijk maakten. Hier is het grieks, gevolgd door de vertaling:

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον.
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθει φόρτου ἑοῖο.
Τὴν δὲ βαριστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη·
Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠύτε κούρη;
Εἰ μέτρον ἐμοὶ δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε γεωμετρίης ἐπίιστορ.

1) Arithmetica practica 1552 blz. 155.
2) Analecta I 1776 blz. 168.
3) Diophantus 1621 blz. 370.

Moerezelin en haar kind — een muil — met wijnvracht beladen,
de oude gebukt onder druk van haar last: ze kreunde en kreunde;
toen ze moeder zag zwoegen en zwaar hoorde hijgen, zei dochter:
„moes, waarom huilen en kermen, je bent toch waarachtig geen kind meer;
één van u bij mij maakt mijn last tweemaal de uwe,
één van mij bij u maakt uw last zwaar als de mijne."
Gij zo knap in de meetkunst! wat was nu de last, die zij droegen?

Een 17e eeuwse oplossing van dit geval danken we aan Bachet; de onbekende werd aangeduid met de eerste letter van numerus (getal) N; daarom heb ik in de vertaling de G gebruikt van getal. Het latijn van Bachet levert de volgende zin:

Er wordt gevraagd 2 getallen te vinden zo, dat het eerste vermeerderd met 1 van het tweede, het dubbele wordt van de rest van het tweede getal; dan een tweede getal, dat door 1 te krijgen van het eerste, gelijk wordt aan het overschot van het eerste.

Stel dat het eerste getal is 1 G + 1. Door 1 af te staan aan het tweede getal, blijft het eerste: 1 G; en dan is het tweede getal ook 1 G. Door daarvan de eenheid af te trekken, die dit getal van het eerste erbij kreeg, wordt dus het tweede getal, zoals het in 't begin was 1 G—1. Wanneer verder het eerste getal daarvan 1 erbij krijgt, wordt het eerste getal 1G + 2 en het overschot van het tweede getal wordt 1 G — 2. Dus is 1 G + 2 het dubbele van 1 G — 2 en ten slotte is 1 G + 2 gelijk aan 2 G — 4. Hieruit volgt 1 G is 6. De gevraagde getallen zijn dus 7 en 5.[4])

[4]) Nam quaeruntur duo numeri, ut primus accipiens 1. à secundo fit duplus ad residuum secundi; at secundus accipiens 1. à primo fit aequalis residuo primi. Esto primus 1 N. + 1. Ergo dando 1. secundo, remanebit primus 1 N et tunc secundus erit 1 N. Quare auferendo ab eo unitatem, quam accepit à primo, fit secundus, ut erat ab initio 1 N. — 1. Iam si ab eo primus accipiat 1. fiet primus 1 N. + 2 et residuum secundi erit 1 N. — 2. Itaque 1 N. + 2. duplus est ad 1 N. — 2 et tandem 1 N + 2 aequatur 2 N. — 4. Unde fit 1 N. 6. Sunt ergo quaesiti numeri 7. et 5.

KALENDER

30 juni 1958: Symposium over neutronendiffractie, georganiseerd door de „Associatie voor toegepaste kernwetenschap", in het Natuurkundig laboratorium van de V.U., De Lairessestraat 174, Amsterdam-Z.
Aanvang 10.15 uur. Men kan zich opgeven bij de secretaris van de symposiumcommissie, Dr. K. van Duuren, Oosterringdijk 18, Amsterdam-O.

29 december 1958: Jaarvergadering van „Wimecos" in „Esplanade" te Utrecht.